ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

NÔNG THỊ MÂY

KHUNG KẾT HỢP ĐỐI NGẪU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

——————o0o——————

NÔNG THỊ MÂY

KHUNG KẾT HỢP ĐỐI NGẪU

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN QUỲNH NGA

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn **"Khung kết hợp đối ngẫu"** là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Nguyễn Quỳnh Nga**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi còn sử dụng một số kết quả, nhận xét của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 03 năm 2019

Tác giả

Nông Thị Mây

Xác nhận
của khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn

TS. Nguyễn Quỳnh Nga

Lời cảm ơn

Để hoàn thành đề tài luận văn và kết thúc khóa học, với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi có môi trường học tập tốt trong suốt thời gian tôi học tập, nghiên cứu tại trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới **TS. Nguyễn Quỳnh Nga** đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn tốt nghiệp này. Đồng thời, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn tới thầy cô trong Khoa Toán, bạn bè đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn tốt nghiệp này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 03 năm 2019
Tác giả

Nông Thị Mây

Mục lục

Lời mở đầu

Trong nghiên cứu các không gian vectơ, một trong những khái niệm quan trọng nhất là khái niệm cơ sở, nhờ đó mỗi vectơ trong không gian có thể viết như tổ hợp tuyến tính của các phần tử trong cơ sở. Tuy nhiên điều kiện để trở thành cơ sở khá chặt chẽ, không cho phép sự phụ thuộc tuyến tính giữa các phần tử trong cơ sở. Điều này làm cho khó tìm hoặc thậm trí không tìm được các cơ sở thỏa mãn một số điều kiện bổ sung. Đây là lý do để chúng ta đi tìm một công cụ khác linh hoạt hơn và khung chính là một công cụ như vậy. Khung cho phép chúng ta biểu diễn mỗi phần tử trong không gian như một tổ hợp tuyến tính (vô hạn) của các phần tử trong khung nhưng không đòi hỏi tính độc lập tuyến tính giữa các phần tử khung.

Khung được giới thiệu vào năm 1952 bởi R. J. Duffin và A. C. Schaeffer trong khi nghiên cứu chuỗi Fourier không điều hòa. Vào năm 1980 R. Young đã viết cuốn sách có những kết quả cơ bản về khung, lại trong ngữ cảnh của chuỗi Fourier không điều hòa. Tuy nhiên phải đến năm 1986, sau bài báo của I. Daubechies, A. Grossmanm và Y. Meyer thì lý thuyết khung mới được các nhà khoa học quan tâm rộng rãi. Khung có nhiều ứng dụng trong xử lý tín hiệu, lý thuyết mật mã, lý thuyết lượng tử, nén dữ liệu,...

Khi cần xử lý một khối lượng lớn các dữ liệu, ta thường cần chia nhỏ hệ khung ra thành những hệ con nhỏ hơn và tổ hợp lại các dữ liệu một cách địa phương. Vì thế P. Casazza và G. Kutyniok [2] đã đưa ra khái niệm khung của các không gian con (Frame of subspaces). Một tên gọi khác của khung của các không gian con là khung kết hợp (Fusion frame). Khung kết hợp có thể xem như là tổng quát hóa của khung. Khung kết hợp là một công cụ toán học để xử lý những bài toán xử lý tín hiệu phân tán và tổng hợp dữ liệu. Khung kết hợp cho phép phân tích tín hiệu bằng cách sử dụng các phép chiếu trên một họ các không gian con chồng lên nhau. Với mong muốn tìm hiểu sâu sắc hơn về khung kết hợp, đặc biệt là khung kết hợp đối ngẫu, do đó tôi chọn đề tài " khung kết hợp đối ngẫu" làm đề tài luận văn cao học.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại một vài kết quả cơ bản sẽ dùng trong chương sau. Nội dung của chương được trình bày dựa trên các tài liệu tham khảo [4], [7].

1.1 Toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Hilbert

Toán tử tuyến tính từ không gian Hilbert $\mathcal{H}$ vào không gian Hilbert $\mathcal{K}$ là liên tục khi và chỉ khi nó bị chặn, nghĩa là, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

Kí hiệu $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ là tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính bị chặn từ $\mathcal{H}$ vào $\mathcal{K}$. Khi $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ thì $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ được kí hiệu đơn giản là $B(\mathcal{H})$.

Chuẩn của $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ được định nghĩa là hằng số C nhỏ nhất thỏa mãn (1.1). Nói một cách tương đương,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.\end{aligned}$$

Mệnh đề 1.1.1. *Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ là các không gian Hilbert. Nếu $T \in$*

$B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ thì tồn tại duy nhất một phần tử $T^* \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ sao cho

$$(T^*x, y) = (x, Ty), x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H}.$$

Hơn nữa,

(i) $(aS + bT)^* = \overline{a}S^* + \overline{b}T^*$.

(ii) $(RS)^* = S^*T^*$.

(iii) $(T^*)^* = T$.

(iv) $I^* = I$, trong đó $I \in B(\mathcal{H})$ là toán tử đồng nhất.

(v) Nếu T khả nghịch, thì T^* cũng khả nghịch và $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, trong đó $S, T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K}), R \in B(\mathcal{K},\mathcal{L})$ và $a, b \in \mathbb{C}$.

Mệnh đề 1.1.2. *Giả sử $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ và $S \in B(\mathcal{K},\mathcal{L})$. Khi đó*

(i) $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|, x \in \mathcal{H}$.

(ii) $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$.

(iii) $\|T\| = \|T^*\|$.

(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Cho $T \in B(\mathcal{H})$. T được gọi là toán tử tự liên hợp nếu $T^* = T$, T được gọi là dương (kí hiệu $T \ge 0$) nếu $(Tx, x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. $T, K \in B(\mathcal{H}), T \ge K$ nếu $T - K \ge 0$. Chú ý rằng với mỗi $T \in B(\mathcal{H})$ thì $(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \ge 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. Do đó, T^*T là dương.

Mệnh đề 1.1.3. *Cho $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử tuyến tính bị chặn và giả sử $\langle Tx, x\rangle = 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. Khi đó*

(i) *Nếu $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert phức thì $T = 0$.*

(ii) *Nếu $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực và T là tự liên hợp thì $T = 0$*

Bây giờ ta chuyển sang một toán tử tuyến tính bị chặn đặc biệt, đó là phép chiếu trực giao trên một không gian con đóng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$.

Cho M là không gian con đóng của $\mathcal{H}$. Mỗi phần tử $x \in \mathcal{H}$ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = y + z$ với $y \in M, z \in M^{\perp}$. Phương trình $\pi_M(y + z) = y$ xác định một toán tử tuyến tính $\pi_M : \mathcal{H} \to M$. Hơn nữa $\|\pi_M(y+z)\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2+\|z\|^2 = \|y+z\|^2$. Từ đó $\|\pi_M(y+z)\| \leq \|y+z\|$ với mọi $y \in M, z \in M^{\perp}$.

Do đó π_M bị chặn và $\|\pi_M\| \leq 1$. Do $\pi_M(y) = y$ với mọi $y \in M$ nên $\|\pi_M\| = 1$ trừ trường hợp $M = \{0\}$ và $P = 0$. Chú ý rằng $\pi_M^2 = \pi_M$ và $\pi_M = \pi_M^*$.

1.2 Khung và các tính chất

Nội dung của mục này được trình bày dựa trên tài liệu tham khảo [4]. Từ đây trở về sau chúng tôi ký hiệu $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert khả ly và I là một tập chỉ số hữu hạn hay đếm được.

Định nghĩa 1.2.1. Một dãy $\{f_i\}_{i\in I}$ của các phần tử trong $\mathcal{H}$ là một khung của $\mathcal{H}$ nếu tồn tại hằng số $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ sao cho

$$\alpha\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \beta\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H} \tag{1.2}$$

Nếu ta chỉ có bất đẳng thức bên phải xảy ra thì ta gọi $\{f_i\}_{i\in I}$ là dãy Bessel của $\mathcal{H}$.

Các số α, β được gọi là các cận khung của khung $\{f_i\}_{i\in I}$ và β được gọi là cận Bessel trong trường hợp $\{f_i\}_{i\in I}$ là dãy Bessel. Chúng là không duy nhất. Cận khung trên tối ưu là cận dưới đúng của tất cả các cận trên của khung, và cận khung dưới tối ưu là cận trên đúng của tất cả các cận dưới của khung. Chú ý rằng các cận tối ưu thực sự là các cận của khung.